SÈRIES DE TAYLOR, McLAURIN, I POLINOMIS DE BERNOULLI.

Sabem que

P(x)=$f(a)+\ f'(a).\frac{x-a}{1!}+\ f''(a).\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots$

$$+f^n(a).(x-a)^n/n!$$

I la sèrie sinus d'x és igual a:

Sinx= $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

Mentre que la Cosinus d'x:

Cosx=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$

Per a qualsevol x i considerant els valors màxims possibles: Sin$=1$ i Cos 0= 1.

També passa amb la tangent d'x:

tgx= $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}(-4)^k(1-4^k)}{(2k)!}.x^{2k-1}$ (*).

k-èssima derivada

succeeix que mentre B_k (o $tg^k(x)$) creix, els seus coeficients creixen exponencialment, i ho fan seguint aquesta raó:

$(-1)^{k-1}(2^{2k})(2^{2k}-1)$

k=0 → $(-1)^{-1}$ = -1

k=1 → $(-1)^0$ = 1

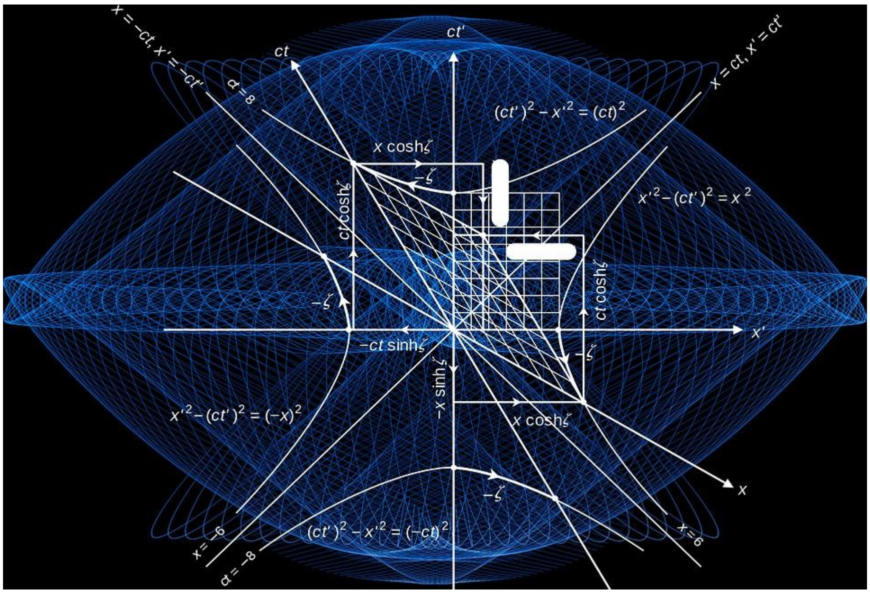
k=2 → $(-1)^1$ = -1

k=3 → $(-1)^2$ = 1

...

Els valors de la tgx quan x fluctua entre -$\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ són: tg(0)=0, tg$(\pi/8) = 1/\sqrt{3}$, tg$(\pi/4) = 1$, $tg(3\pi/8) = \sqrt{3}$, tg$(\pi/2) = \infty$ mentre que de 0 a -$\frac{\pi}{2}$ els valors són a la inversa i negatius:

- $\pi/2$	-$3\pi/8$	$-\pi/4$	- $\pi/8$	0
-∞	- $\sqrt{3}$	-1	-$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



Mentre que si a=0 (cas de les sèries de McLaurin)

Coneguent que

tg(x) = tg(x)

tg'(x)= 1+tg^2(x)

tg''(x)= 2tg(x)+2tg^3(x)

tg'''(x)=2+8tg^2(x)+6tg^4(x)

tg^{IV}(x)= 16tg(x)+ 40tg^3(x)+ 24tg^5(x)

...

A més, tg(x)= (1+tg^2(a)).(x-a)/1!+(2tg(a)+2tg^3(a)).(x-a)^2/2! +(2+8tg^2(a)+6tg^4(a)).(x-a)^3/3!+...

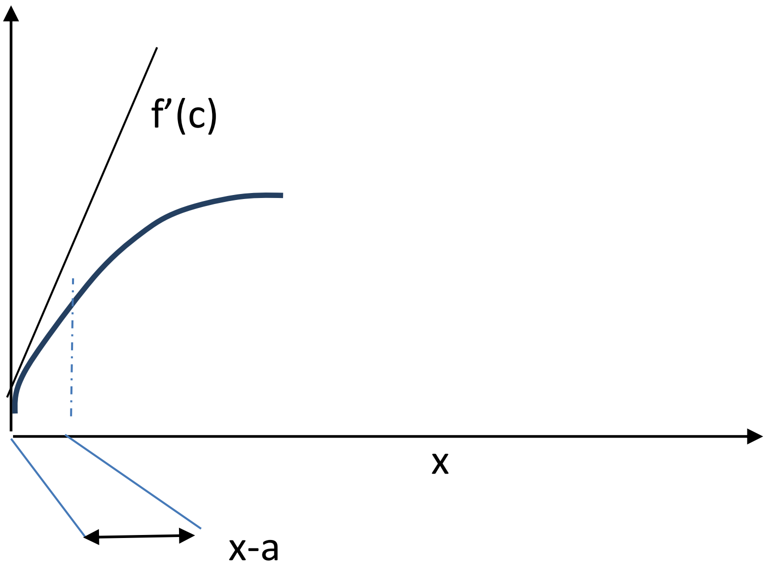
Ara pararem atenció calculant el **residu** (**remainder): $\boldsymbol{R_{n+1}(x)}$**:

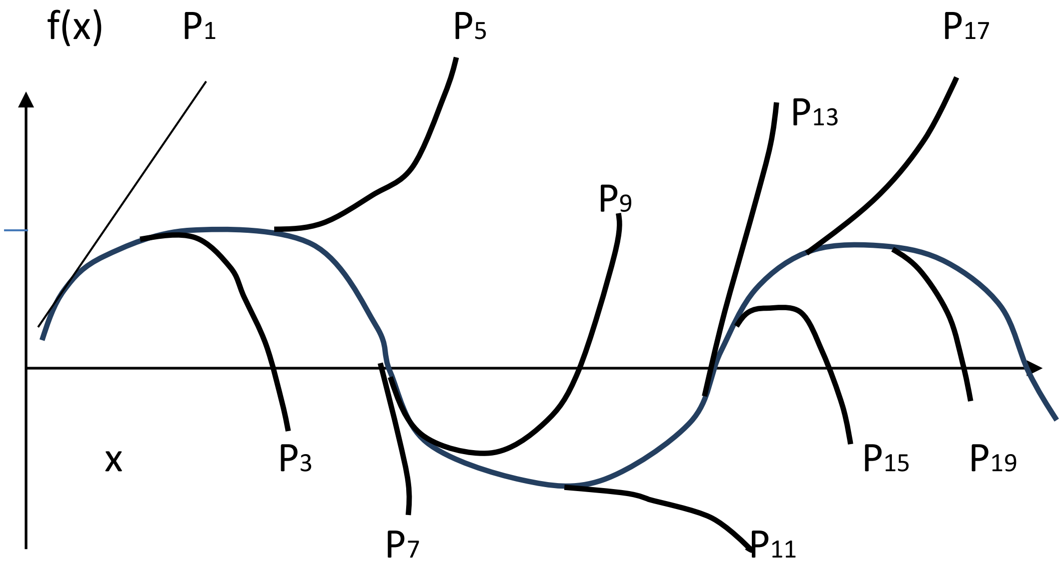
$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ on c ∈ (a,x)

És lògic que f$^{n=1}$(c)= f'(c)= $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}$

mentre x s'apropa a →a $\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$=0 , n=0 $\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$





El **residu** a $f^{+1}(c)$ is $\leq$ M , so $R_{n+1}(x) \leq M\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$

Ara aprofundirem en el seu càlcul:

En f(x)= $\sqrt[3]{x}$, estimarem el seu càlcul quan x= 28 usant la Sèrie de Taylor fins a n=2:

f(x)= $x^{1/3}$

$f^{n=1}(x) = 1/3.x^{-2/3} \rightarrow f^{n=1}(27) = 0'037037$

$f^{n=2}(x) = -2/9.x^{-5/3} \rightarrow f^{n=2}(27) = 0'000914$

per tant si a=27: $\sqrt[3]{x} =$ f(27)+ $f^{n=1}(27).(x-27)/1!+ f^{n=2}(27).(x-27)^2/2!+ R_{n>2}(27)$

ja que: x=28, $\sqrt[3]{28} = 3'036579$.

f(28)= $P_n(28) + R_{n+1}(28)$

o el que és el mateix: $R_3(28) = \frac{f^{n=3}(c)}{3!}(28-27)^3$ and c=28.

$f^{n=3}(28) = 1/3.(28)^{-2/3}$

Quan enlloc d'∞ acotem el límit a 3, per exemple, el factor $(x-a)^p$, resoluble a través del triangle de tartàglia i descrit com a:

$B_p(n) = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{p-k} B_k n^{p-k}$

n$\equiv$ x

n=1 i no n=0 perquè ja disposem d'un terme sense "x" a tg(x), el qual és tg(a), cosa que també podem corroborar a (*).

Per exemple:

1 $\longrightarrow$ p=0

1 1 $\longrightarrow$ p=1

1 2 1 $\longrightarrow$ p=2

1 3 3 1 $\longrightarrow$ p=3

1 4 6 4 1 $\longrightarrow$ p=4

...

p= 3

k= 1: $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{0}$

$3B^1x^2 + 3B^2x + 1B^3$

k= 2 $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{0}$

$3B^2x^1 + 1B^3$

k= 3 $\binom{3}{0}$

$1B^3$

els valors de tg(a) [o B_p , com ho volguem dir], igual que x^{p-n}, modulen l'expressió de Taylor de tg(x).