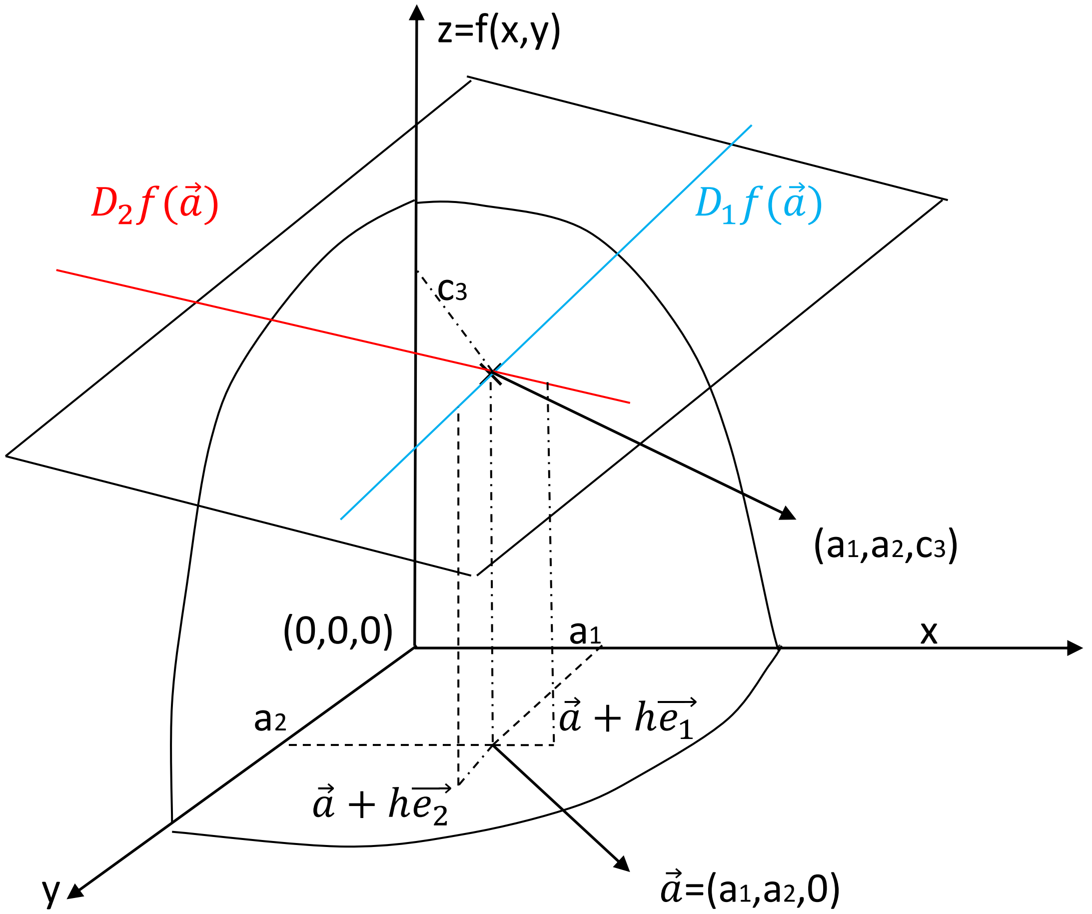
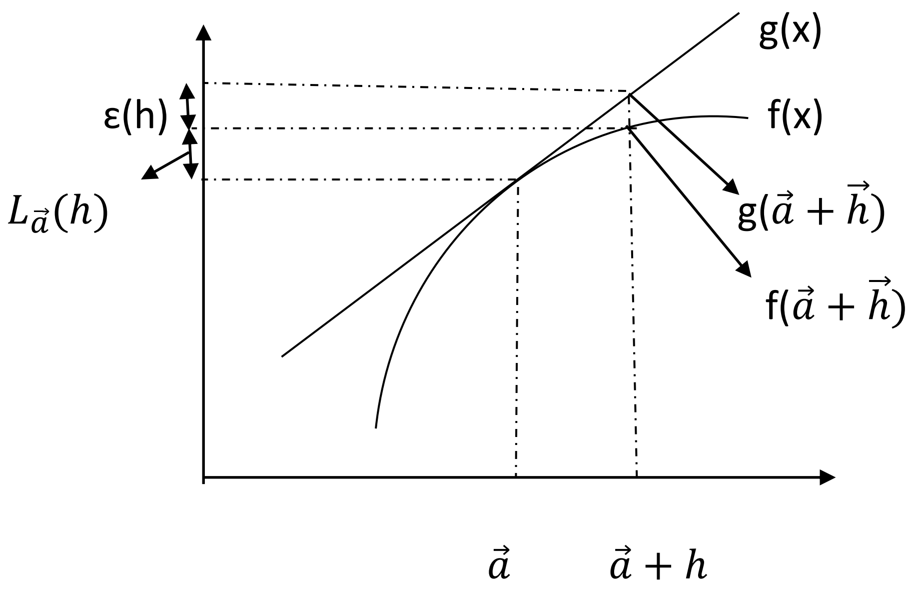
CAPÍTOL 35

DERIVADES EN 3-DIMENSIONS.

DERIVADES EN 3-D.





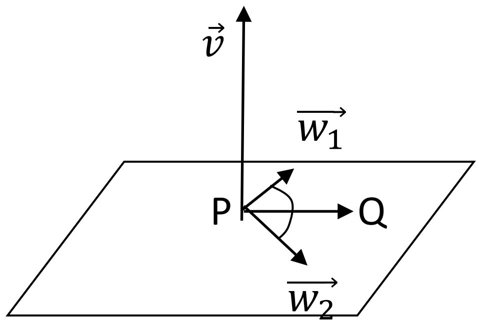
per tant: $L_{\vec{a}}(h) = \mathrm{f}(\vec{a} + \vec{h}) - \mathrm{f}(\vec{a})$ i

$\varepsilon(\mathrm{h}) = \mathrm{f}(\vec{a} + \vec{h}) - \mathrm{g}(\vec{a} + \vec{h})$

$D_1 f(\vec{a})$ i $D_2 f(\vec{a})$ són les pendents de les seves corresponents rectes.

Fem un petit incís en matemàtiques dels vectors:

Suposem el pla g(x) definit pels vectors $\overrightarrow{\omega_1}$ i $\overrightarrow{\omega_2}$.

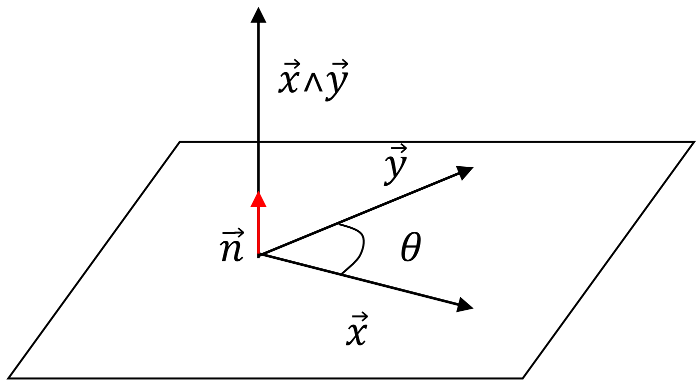


$\{PQ\} = a + r.\overrightarrow{\omega_1}$+s. $\overrightarrow{\omega_2}$ on $\vec{v} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{\omega_2}$.

Si $\vec{v} = (a, b, c)$ $\vec{v} = a.\overrightarrow{e_1} + b.\overrightarrow{e_2} + c.\overrightarrow{e_3}$

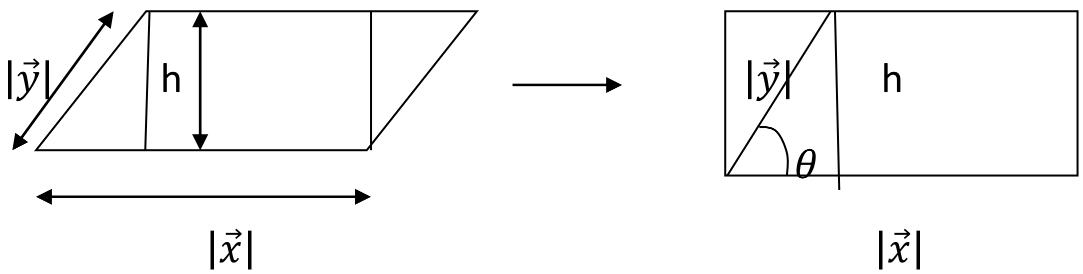
Sabem que tot vector $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{\omega}$ compleix que el seu producte $\vec{v}.\vec{\omega}$= 0.

$\overrightarrow{dS}$ es defineix com la ⊥ formada pels 2 vectors$\vec{x}$ i $\vec{y}$:



$\vec{n}$ $vector\ unitari$

$\vec{x}\wedge\vec{y} = |\vec{x}|.|\vec{y}|.\text{Sin}\theta.\vec{n}$ representa l'àrea del paral·lelogram de costats escalars $|\vec{x}|\ i\ |\vec{y}|$.



Àrea= $|\vec{x}|$.h= $|\vec{x}|.|\vec{y}|.\text{Sin}\theta$

que es calcula fent el determinant:

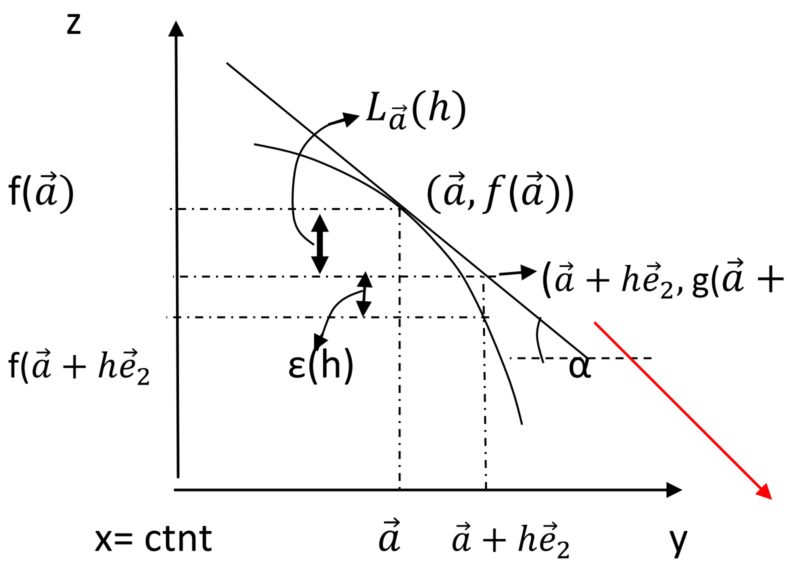
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$\vec{x} = x_1.\vec{\imath} + x_2.\vec{\jmath} + x_3.\vec{k} \quad \vec{y} = y_1.\vec{\imath} + y_2.\vec{\jmath} + y_3.\vec{k}$

on $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ *són la base canònica de* R^3.

$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ = a $\vec{\imath}$ + b $\vec{\jmath}$ + c $\vec{k}$ on (a, b, c) és $\vec{x}\wedge\vec{y}$.

$x_2y_3\,\vec{\imath} + x_3y_1\,\vec{\jmath} + x_1y_2\,\vec{k} - x_2y_1\,\vec{k} - x_3y_2\,\vec{\imath} - x_1y_3\,\vec{\jmath}$



aleshores la recta y-z se representa així:

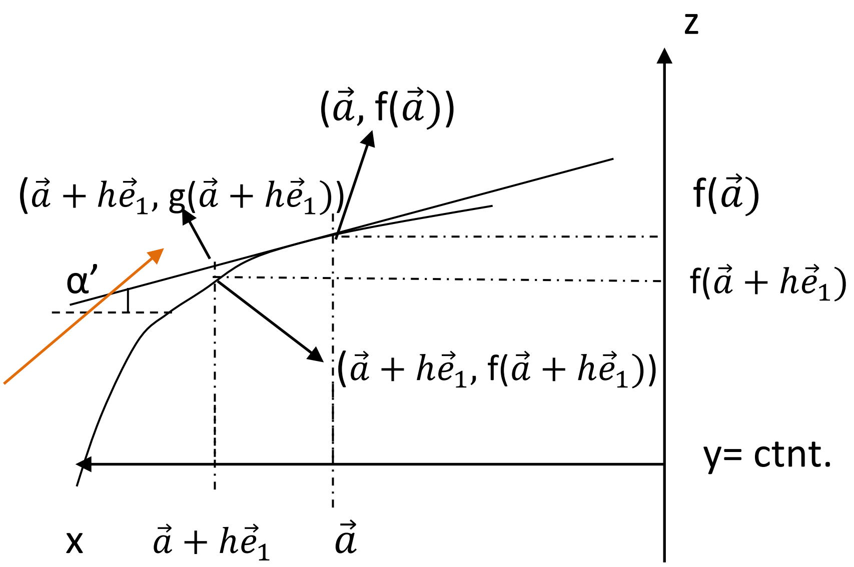
z= $D_2 f(\vec{a}).\, y + c$

el seu vector director serà:

(v_1, v_2)= ($\vec{a} + h\vec{e}_2 - \vec{a}$, g($\vec{a} + h\vec{e}_2$)- $f(\vec{a})$)

$D_2 f(\vec{a})$ =tgα<0 si prenem la direcció de la fletxa en vermell.

Seguint al teoria dels vectors directors: y.v_2- z. v_1+ n= 0



Recta x-z: z= $D_1 f(\vec{a}).x + m$

on $D_1 f(\vec{a})$ =tgα’>0 ja que la fletxa vermella puja.

(u_1,u_2)= $[\,(\vec{a}+h.\vec{e}_1)-\vec{a}, \mathrm{g}(\vec{a}+h.\vec{e}_1)-\mathrm{f}(\vec{a})]$ és el vector director.

I la recta serà: x. u_2- z. u_1+ d= 0 tgα i tgα' valen zero quan $D_1 f(\vec{a})$ i $D_2 f(\vec{a})$ són =0.

$$D_1 f(\vec{a}) = \frac{\mathrm{f}(\vec{a} + h\vec{e}_1) - f(\vec{a})}{h\vec{e}_1}$$

$$D_2 f(\vec{a}) = \frac{\mathrm{f}(\vec{a} + h\vec{e}_2) - f(\vec{a})}{h\vec{e}_2}$$

Acàs α= α'?

Ara aïllaré el vector $\vec{z}$=(c_1,c_2,c_3) a partir del següent determinant:

Acàs

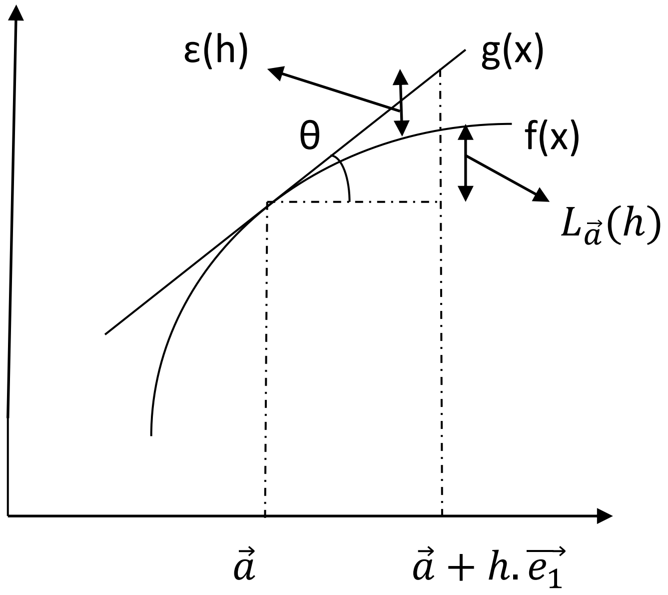
$$\begin{array}{c} Z \\ Y \\ X \end{array} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & h\vec{e}_2 & \mathrm{f}(\vec{a} + h\vec{e}_2) - f(\vec{a}) \\ h\vec{e}_1 & 0 & \mathrm{f}(\vec{a} + h\vec{e}_1) - \mathrm{f}(\vec{a}) \end{vmatrix} =$$

=[$(h\vec{e}_2).(\mathrm{f}(\vec{a}) - \mathrm{f}(\vec{a} + h\vec{e}_1))]\ \vec{i} + [\left(\mathrm{f}(\vec{a} + h\vec{e}_2) - f(\vec{a})\right).(h\vec{e}_1)]\vec{j} -$ $[(h\vec{e}_1).(h\vec{e}_2)]\vec{k}$.

On, com a premisa, usaré les $D_1 f(\vec{a})$ i $D_2 f(\vec{a})$ sempre positives.

En 3-D, les línies es converteixen en vectors, per tant per a obtenir distàncies cal aplicar el producte escalar: $|\vec{a}|$ i $|\overrightarrow{e_n}|$

I veient que $D_1 f(\vec{a})$ $D_2 f(\vec{a})$ i d$\vec{S}$ són perpendiculars ente ells obrim nous horitzons.



Sabem que $\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(\mathrm{h})}{h} = 0$