

Com resoldre equacions amb arrels cúbiques, quàrtiques i quintiques II:

Posem un exemple:

$$x^5 + 4x^3 - x^2 + 3 = 0$$

$$\text{suposem que } x^5 = +a \rightarrow x = \sqrt[5]{a} \rightarrow \frac{x}{\sqrt[5]{a}} = 1$$

$$4x^3 - x^2 + 3 = -x^5 \rightarrow \frac{4x^3 - x^2 + 3}{-a} = 1 = \frac{x}{\sqrt[5]{a}} \rightarrow$$

$$\sqrt[5]{a} \cdot (4x^3 - x^2 + 3) = -ax \rightarrow x = \frac{-\sqrt[5]{a}}{a} \cdot (4x^3 - x^2 + 3)$$

$$(4x^3 - x^2 + 3) = -\sqrt[5]{a^4} \cdot x$$

$$\text{Ara } x^3 = +b \rightarrow \frac{x}{\sqrt[3]{b}} = 1 \rightarrow 4 \cdot b = -\sqrt[5]{a^4} \cdot x + x^2 - 3 \rightarrow$$

$$\frac{-\sqrt[5]{a^4} \cdot x + x^2 - 3}{4b} = 1 = \frac{x}{\sqrt[3]{b}} \rightarrow \frac{\sqrt[3]{b}}{b} (-\sqrt[5]{a^4} \cdot x + x^2 - 3) = 4x \rightarrow$$

$$(-\sqrt[5]{a^4} \cdot x + x^2 - 3) = 4x \cdot \sqrt[3]{b^2} \rightarrow x^2 = 4 \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot x + \sqrt[5]{a^4} \cdot x + 3 =$$

$$x^2 = +c \rightarrow (x/\sqrt{c}) = 1$$

$$\rightarrow \frac{4 \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot x + \sqrt[5]{a^4} \cdot x + 3}{c} = 1 = \frac{x}{\sqrt{c}} \rightarrow x = \sqrt{c} \cdot \frac{4 \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot x + \sqrt[5]{a^4} \cdot x + 3}{c} \rightarrow$$

$$x(\sqrt{c}) = 4 \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot x + \sqrt[5]{a^4} \cdot x + 3 \rightarrow x(4 \cdot \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[5]{a^4} - \sqrt{c}) = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-3}{4 \cdot \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[5]{a^4} - \sqrt{c}}$$

$$\sqrt[5]{a^4} \rightarrow \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^2} \rightarrow \begin{matrix} (+ +)^{1/5}, (+ +)^{1/5} & A \\ \text{ó} & (- +)^{1/5}, (- +)^{1/5} & A' \end{matrix}$$

$$\sqrt[4]{b^3} \rightarrow \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b^2} \rightarrow \sqrt{d}$$

$$\begin{matrix} (+)^{1/4}, (-)^{1/4} \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ C & C' \end{matrix}$$

$$\sqrt[3]{c^2} \rightarrow \underbrace{(+ +)^{1/3}}_D \text{ ó } \underbrace{(- +)^{1/3}}_{D'}$$

$$\sqrt[2]{d} \rightarrow \underbrace{(+)^{1/2}}_E, \underbrace{(-)^{1/2}}_{E'} \rightarrow "i"$$

En els casos A , A' i D , D' poden ser positius o negatius, mai els dos.

El problema rau en si les arrels només han de ser reals o si també s'hi inclouen les imaginàries.

Tingueu en compte que sempre suposo que $x^n = + \text{ nombre}$ i no $x^n = - \text{ nombre}$.

Gairebé en totes les equacions $\exists$ arrels imaginàries, com ara C' i E'; les considero equivalents.

Un altre exemple:

$$2x^4 + x^3 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x^3 - 3x + 4 = -2x^4 \rightarrow \frac{x^3 - 3x + 4}{-2x^4} = 1 = \frac{x}{\sqrt[4]{a}} \rightarrow$$

$$x^4 = +ax = \sqrt[4]{a} \quad 1 = \frac{x}{\sqrt[4]{a}}$$

$$\rightarrow -\frac{2ax}{\sqrt[4]{a}} = x^3 - 3x + 4 \rightarrow -2 \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot x + 3x - 4 = x^3 \rightarrow$$

$$x^3 = +bx \sqrt[4]{b} = \frac{x}{\sqrt[4]{b}} = 1$$

→fent el mateix procediment d'igualar a 1:

$$\frac{-2 \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot x + 3x - 4}{b} = 1 = \frac{x}{\sqrt[4]{b}} \rightarrow \text{dóna: } -2 \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot x + 3x - 4 = \frac{b \cdot x}{\sqrt[4]{b}} \rightarrow$$

$$\rightarrow -2 \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot x + 3x - 4 - \sqrt[4]{b} \cdot x = 0 \rightarrow x(-2\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b} + 3) = +4$$

$$\rightarrow x = \frac{4}{(-2\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b} + 3)}$$

$$\sqrt[4]{a^3} \rightarrow \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b^2} \text{ segons el raonament anterior C, C'}$$

$$\sqrt[4]{b} \rightarrow \text{segons el raonament anterior: E}$$

Finalment el terme $x^1 = \pm e$

Sumant-les totes juntes donen 4 solucions!!

$$2x^4 + x^3 - 3x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 1 \end{array}$$

UN ALTRE EXEMPLE:

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

Farem el mateix procés, però com que és feixuc aniré al gra:

$$x^3 = a \dots x = \sqrt[3]{a} \cdot x \dots \frac{a \cdot x}{\sqrt[3]{a}} = 2 - x^2 \dots - \sqrt[3]{a^2} \cdot x - 2 = x^2 = b \dots$$

$$\frac{-\sqrt[3]{a^2} \cdot x - 2}{b} = 1 = \frac{x}{\sqrt{b}} \dots - \sqrt[3]{a^2} \cdot x - 2 = x \cdot \sqrt{b} \dots x = \frac{-2}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b}} \dots$$

On $\sqrt[3]{a^2}$ ofereix $\rightarrow (+ +)^{1/3}$ ó $(+ -)^{1/3}$

$$\sqrt{b} \rightarrow (+)^{1/2} = 1, (-)^{1/2} = i$$

Coincideix amb el nombre d'arrels del polinomi: 3.

I ara proposo una nova equació:

$$x^6 = 1$$

També puc expressar x^6 com a $\sim \sqrt{x^7 \sqrt{x^6 \sqrt{x^5 \sqrt{x^4 \sqrt{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x}}}}} =$

+1

$(-1)^7 (-1)^6 (-1)^5 (-1)^4 (-1)^3 (-1)^2 (-1)^1 \rightarrow 7$ valors negatius, dels quals s'obté +1

$(+1)^7 (+1)^6 (+1)^5 (+1)^4 (+1)^3 (+1)^2 (+1)^1 \rightarrow$ cap valor negatiu: =+1

$(-1)^7 (-1)^6 (-1)^5 (-1)^4 (-1)^3 (\pm 1)^2 (-1)^1 \rightarrow 6$ valors negatius i un de positiu. Sempre que no siguin aquests 4: x^7 ni x^5 ni x^3 ni x [que són senars $(-1)^7 = -1$, $(-1)^5 = -1$,

$(-1)^3 = -1$, $x = -1$, que en ser 4 acaba donant: + 1] .

Els termes x^2 , x^4 , x^6 són els mateixos si $x = +1$ o $x = -1$.

5 valors negatius: per exemple:

$(-1)^7 (-1)^6 (-1)^5 (\pm 1)^4 (-1)^3 (\pm 1)^2 (-1)^1 \rightarrow$ és similar al cas de 6 valors negatius: els termes x^2 , x^4 , x^6 no importa si = +1

o = -1

$$(-1)^7 (\pm 1)^6 (-1)^5 (-1)^4 (-1)^3 (\pm 1)^2 (-1)^1$$

$$(-1)^7 (\pm 1)^6 (-1)^5 (\pm 1)^4 (-1)^3 (-1)^2 (-1)^1$$

4 valors negatius: és el màxim de "-1" que hi ha d'haver per aconseguir $x^6 = 1$. Els 4 senars es cancel·len i només té una expressió: $(-1)^7 (\pm 1)^6 (-1)^5 (\pm 1)^4 (-1)^3 (\pm 1)^2 (-1)^1$

Tot i que també podem incloure l'opció 2 valors negatius $(+1)^7 (\pm 1)^6 (+1)^5 (\pm 1)^4 (-1)^3 (\pm 1)^2 (-1)^1 \rightarrow$ els 2 valors negatius, com podem intuir, només es poden localitzar a x^7, x^5, x^3, x amb 2 possibilitats de combinació:

$$(+1)^7 (\pm 1)^6 (+1)^5 (\pm 1)^4 (-1)^3 (\pm 1)^2 (-1)^1$$

$$(-1)^7 (\pm 1)^6 (+1)^5 (\pm 1)^4 (+1)^3 (\pm 1)^2 (-1)^1$$

$$(+1)^7 (\pm 1)^6 (-1)^5 (\pm 1)^4 (+1)^3 (\pm 1)^2 (-1)^1$$

$$(+1)^7 (\pm 1)^6 (-1)^5 (\pm 1)^4 (-1)^3 (\pm 1)^2 (+1)^1$$

$$(-1)^7 (\pm 1)^6 (-1)^5 (\pm 1)^4 (+1)^3 (\pm 1)^2 (+1)^1$$

$$(-1)^7 (\pm 1)^6 (+1)^5 (\pm 1)^4 (-1)^3 (\pm 1)^2 (+1)^1$$

El cas d'un valor negatiu no es permet, ja que podria donar com a resultat un valor de -1 i ja no seria una arrel de $x^6 = +1$.

i això és tot.

i per fer més clar el mecanisme que utilitzo, proposaré un altre exemple:

$$x^5 + 2x^4 - x^2 + 4 = 0 \quad x^5 = +a \quad x^4 = +b \quad x^2 = +c$$

$$x = f(\sqrt[5]{a^4}, \sqrt[4]{b^3}, \sqrt[2]{c}, C) \text{ on } C \equiv 4 \rightarrow x = \frac{-4}{\sqrt[5]{a^4} + 2\sqrt[4]{b^3} - \sqrt[2]{c}}$$

$$\text{equació: } x_a x_b (x^3 + 2x^2 - 1) = -4$$

$$\text{solucions: } \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

I comptant-ho tot dona 5 solucions!!!

$$x^5 = +a$$

quan $a = 1$, $n = 1, 6$

1. Cas en què tots els x^n són "+".

Cas en què només tenim 1 $x = "-"$ ~~ja~~, ja que no és possible substituir totes les x^n de manera que sigui $= +a$

2. Cas en què tenim 2 $x = "-"$:

(+1, +1, +1, -1, +1, -1)

(+1, -1, +1, +1, +1, -1)

(+1, -1, +1, -1, +1, +1)

3. Cas en què tenim 3 $x = "-"$:

(-1, -1, +1, -1, +1, +1) (+1, -1, -1, -1, +1, +1)

(-1, +1, +1, -1, +1, -1) (+1, -1, +1, -1, -1, +1)

(-1, -1, +1, +1, +1, -1) (+1, +1, -1, -1, +1, -1)

(+1, +1, +1, -1, -1, -1) (+1, -1, +1, +1, -1, -1)

(+1, -1, -1, +1, +1, -1)

4. Cas en què tenim 4 $x = "-"$:

(també possible)

5. Cas en què tenim 5 $x = "-"$:

(-1, -1, -1, -1, -1, +1)

(-1, +1, -1, -1, -1, -1)

(-1, -1, -1, +1, -1, -1)

I els cinc casos junts donen com a resultat les 5 combinacions possibles: les 5 arrels de « $x^5 = +1$ ».

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 3$$

$$x = \frac{3}{\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[3]{c^2} + \sqrt[2]{d} + 1}$$

$$\text{Solucions} \rightarrow x_a(x^4 + x^3 + x^2 + 1) = 3$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Cosa que concorda: $1+2+1+1 \rightarrow 5$ solucions

$$\text{Conclusió: } \sqrt[4]{b^2} = \sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{d}$$

$\sqrt[2]{d}$ té una arrel imaginària i una arrel real: E i E'.

Exemple:

$$x^5 + x^3 = 1 \rightarrow -1 + x^3 = -x^5$$

$$x^5 = -a \rightarrow 1 = \frac{x}{\sqrt[5]{(-1) \cdot a}}$$

$$-1 + x^3 = a \rightarrow \frac{-1+x^3}{a} = 1 = \frac{x}{\sqrt[5]{(-1) \cdot a}} \rightarrow -1 + x^3 = x \cdot \frac{a}{\sqrt[5]{(-1) \cdot a}} \rightarrow$$

$$-1 + x^3 = x, \frac{a}{\sqrt[5]{(-1)} \sqrt[5]{a}} = x \cdot \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{(-1)}}$$

$$\text{mentre } \sqrt[5]{(-1)} = \sqrt[10]{(-1)^2} = \sqrt[10]{(1)} = 1.$$

$$x^3 = -bx = f(\sqrt[5]{a^4}, \sqrt[3]{b^2}, -1) \quad x = \frac{1}{\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$\text{Però... aneu amb compte perquè } x^3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Aquestes x^2 són les dues arrels que faltaven a part d'A o A' i D o D' (descrites a x_1, x_2 and x_3).

$$\text{o en el cas de } x^4 - x^3 = -2,$$

$$x^4 = -b$$

$$\dots 1 = \frac{x}{\sqrt[4]{(-1) \cdot b}} \dots -x^3 + 2 = -x^4 \dots \frac{-x^3 + 2}{b} = 1 = x \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(-1) \cdot b}}$$

$$\rightarrow -x^3 + 2 = x \cdot \frac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{(-1)}} \text{ on } \sqrt[4]{(-1)} = \sqrt[8]{(-1)^2} = 1$$

$$\text{I així, amb } x^3 = -cx = f(\sqrt[4]{b^3}, \sqrt[3]{c^2}, 2) \quad x = \frac{-2}{\sqrt[4]{b^3} + \sqrt[3]{c^2}}$$

D'aquesta manera, funciona tant si fem servir $x^n = +p$ com $x^n = -p$