Asimptòtic enfocament :

inserim un coeficient ε el que sigui en una equació :

Ex: $x^5 + x = 1$ $\varepsilon . x^5 + x = 1$

Si $\varepsilon \to 0$, x= 1 trivial solució

En canvi, quan $\varepsilon \neq 0$ passa per 4 arrels i nosaltres provarem la següent substitució $y^4 = \varepsilon . x^4$

Obtingueu $y = x . \varepsilon^{1/4} \to x = y/\varepsilon^{1/4}$ i inserir-ho en la nostra equació :

$\varepsilon(y/\varepsilon^{1/4})^5 + (y/\varepsilon^{1/4}) - 1 = 0 \to (y^5/\varepsilon^{\frac{1}{4}}) + (y/\varepsilon 1^{/4}) - 1 = 0$

En aquell moment punt Fem servir la sèrie de Taylor fins a la "y":

$P(y) = \sum_{m=1}^{4} c_m . (x . \varepsilon^{1/4})^m$

Per exemple :$x^3 + \varepsilon x^2 - 4 = 0$

Suposem ε= 0, $x_0 = \sqrt[3]{4}$

També $\varepsilon \neq 0$:

$P(x) = \sum_{m=1}^{2} c_m . (x . \varepsilon^{1/2})^m = c_1 . x . \varepsilon^{1/2} + c_2 . x^2 . \varepsilon^1$

on $y = x . \varepsilon^{1/2}$, per exemple $\varepsilon = 1$

$(\frac{y}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}})^3 + \varepsilon \left(\frac{y}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right)^2 - 4 = 0 \to y^3 + \varepsilon^{3/2} y^2 - 4\varepsilon^{3/2} = 0$

$$(x_0 + P(x))^3 + \varepsilon(x_0 + P(x))^2 = 4$$

$(x_0^3 + 3x_0^2P(x) + 3x_0P(x)^2 + P(x)^3) + \varepsilon[x_0^2 + 2P(x)x_0 + P(x)^2] = 4$

$\left(x_0^3 + 3x_0^2c_1x\varepsilon^{\frac{1}{2}} + 3x_0^2c_2x^2\varepsilon + 3x_0c_1^2x^2\varepsilon + 2.3x_0c_1c_2x^3\varepsilon^{\frac{3}{2}} + 3x_0c_2^2x^4\varepsilon^2 + c_1^3x^3\varepsilon^{3/2} + 3c_1^2c_2x^4\varepsilon^{5/2} + 3.\,c_1c_2^2x^5\varepsilon^{5/2} + c_2^3x^6\varepsilon^3\right) + \varepsilon.[x_0^2 + 2x_0c_1x\varepsilon^{1/2} + 2.\,x_0c_2x^2\varepsilon + c_1^2x^2\varepsilon + 2c_1c_2x^3\varepsilon^{3/2} + c_2^2x^4\varepsilon^2] = 4$

(ε^0): $x_0^3=4$

(ε^1):3 $x_0^2c_2x^2\varepsilon+ 3x_0c_1^2x^2\varepsilon+ x_0^2\varepsilon=0\rightarrow x^2(3\,x_0^2c_2+ 3x_0c_1^2)= -x_0^2$

$c_1.x$=a , $c_2.x^2$=b $a^2 = \frac{-x_0-3x_0b}{3}$

$\left(\varepsilon^{3/2}\right)$: $2.3x_0c_1c_2x^3\varepsilon^{\frac{3}{2}} + c_1^3x^3\varepsilon^{3/2} + 2x_0c_1x\varepsilon^{3/2} = 0$

$c_1^3x^2$+6 $x_0c_1c_2x^2 + 2x_0c_1$=0

$6x_0b + \frac{-x_0-3x_0b}{3} + 2x_0 = 0 \rightarrow$ b($6x_0$+$\frac{-x_0-3x_0}{3}$)=-$2x_0$

$\rightarrow$ b=$\frac{-2x_0}{\frac{18x_0-x_0-3x_0}{3}}$ =$\frac{6}{18-1-3}$)= -3/7

(ε^2): $3x_0c_2^2x^4\varepsilon^2+ 2.\,x_0c_2x^2\varepsilon^2 + c_1^2x^2\varepsilon^2$=0

Ara, tornant a a^2, $a^2 = \frac{-\sqrt[3]{4}-3.\sqrt[3]{4}.(-3/7)}{3} =$

=$\sqrt[3]{4}$.(-1+(9/7)).(1/3) $\rightarrow$ $a = \sqrt{\sqrt[3]{4}.(\frac{2}{21})}$

Aleshores, l'equació $x^3 + \varepsilon x^2 - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \left(x_0 + P(x)\right) = \sqrt[3]{4}+ \sqrt{\sqrt[3]{4}.(\frac{2}{21})}\,.\varepsilon+ (-3/7).\varepsilon^2 + \cdots$

Un altre exemple :

$x^4 + 2x^3 - 3 = 0$ ens situem ε a: $\varepsilon . x^4 + 2x^3 - 3 = 0$

Si nosaltres assumir ε=0, $x_0 = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}}$com a solució trivial

La resta de arrels es trobarà substituint

$y^3 = x^3 . \varepsilon$ o y=x.$\varepsilon^{1/3}$

$\varepsilon . (\frac{y}{\varepsilon^{1/3}})^4$+ 2 ($\frac{y}{\varepsilon^{1/3}}$)^3-3=0)→ $\frac{y^4 . \varepsilon^{2/3} + 2y^3 - 3\varepsilon}{\varepsilon}$= 0 (*)

P(x)= $\sum_{m=1}^{3} c_m . (x . \varepsilon^{1/3})^m$= $c_1 . (x . \varepsilon^{\frac{1}{3}})$+ $c_2 . (x^2 . \varepsilon^{2/3})$+

+ $c_3 . (x^3 . \varepsilon^1)$(**)

Utilitzant $\varepsilon \neq$0, per exemple ε =1: acabar en

$$x_1 = 1$$

I: $c_1 . x$=a , $c_2 . x^2$=b , $c_3 . x^3$=d

Finalment,

$\varepsilon(x_0 + \mathrm{P(x)})^4 + 2(x_0 + \mathrm{P(x)})^3 = 3$, substitució que mana perquè del binomi de Newton:

$\varepsilon(x_0^4 + 4x_0^3 P(x) + 6x_0^2 P(x)^2 + \cdots)$ +2.($x_0^3 + 3x_0^2 P(x)$ +
$+3x_0 P(x)^2 \ldots) = 3$

$P(x)^2 = c_1^2 x^2 \varepsilon^{2/3} + 2c_1 c_2 x^3 \varepsilon^1 + c_2^2 x^4 \varepsilon^{4/3} + 2\big(c_1 x \varepsilon^{1/3} +$
$c_2 x^2 \varepsilon^{2/3}\big)(c_3 . x^3 \varepsilon^1) + (c_3 . x^3 \varepsilon^1)^2$=

$= c_1^2 x^2 \varepsilon^{2/3} + 2c_1 c_2 x^3 \varepsilon^1 + c_2^2 x^4 \varepsilon^{4/3} +$

+2.$(c_1 c_3 x^4 \varepsilon^{4/3} + c_2 c_3 x^5 \varepsilon^{5/3}) + c_3^2 x^6 \varepsilon^2$

Aleshores:

$[\varepsilon^1 x_0^4 + 4x_0^3 c_1 x\varepsilon^{4/3} + 4x_0^3 c_2 x^2\varepsilon^{5/3} + 4x_0^3 c_3 x^3\varepsilon^2 +$

$+6\, x_0^2 c_1^2 x^2\varepsilon^{5/3} + 12x_0^2 c_2 c_1 x^3\varepsilon^2 + 6\, x_0^2 c_2^2 x^4\varepsilon^{7/3}]$-

$-\, 2\, [\, x_0^3 + 3x_0^2 c_1 x\varepsilon^{1/3} + 3\, x_0^2 c_2 x^2\varepsilon^{2/3} + 3x_0^2 c_3 x^3\varepsilon^1 +$

$(3x_0 c_1^2 x^2\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 6x_0 c_1 c_2 x^3\varepsilon^1 + 3x_0 c_2^2 x^4\varepsilon^{\frac{4}{3}} + 6c_1 c_3 x^4\varepsilon^{4/3} +$
$6c_2 c_3 x^5\varepsilon^{5/3}) + 3x_0 c_3^2 x^6\varepsilon^2] = 3$

(ε^0) - 2 x_0^3= 3 com nosaltres tenir ja vist :$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}}$

(ε^1) $x_0^4 - 6x_0^2 c_3 x^3 - 12x_0 c_1 c_2 x^3 = 0$

→ d=$\frac{-12ab + x_0^3}{6x_0}$

(ε^2) $4x_0^3 c_3 x^3 + 12x_0^2 c_2 c_1 x^3$- $3x_0 c_3^2 x^6$=0

→ substituïnt la “d

”, ens trobem amb una equació de segon ordre on la incògnita és “a.b”: -432.$(ab)^2$+168. x_0^3(a.b)+21. x_0^6=0

a.b= $\frac{-168x_0^3 \pm x_0^3\sqrt{64512}}{2.432}$ → a.b=$\frac{86x_0^3}{864}$

a.b=$\frac{-422x_0^3}{864}$

escullo la primera: a=$\frac{86x_0^3}{864.b}$

ara:

($\varepsilon^{5/3}$) $4x_0^3 c_2.x^2$+$6x_0^2(c_1.x)^2$-$12x_0 c_2 c_3 x^5$=0

Volem l’expressió numèrica de “b”, per tant:

2. x_0^3b+$\frac{22188.x_0^8}{746496.b^2} + \frac{43}{36}x_0^3$b-$x_0^3$b=0 →

2(746496)$x_0^3 b^3 + 22188x_0^8$+$\frac{43}{36}$(746496)$x_0^3 b^3$-x_0^3.746496. $b^3 = 0$

“A”. $b^3 + \text{"B"} = 0 \rightarrow \text{b}=\sqrt[3]{\frac{-(22188.(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}})^8}{\left(-\frac{3}{2}\right).[1492992+891648-746496]}}$

Per tant: $x_0 + P(x) = x_0 + \text{a}.\varepsilon^{1/3} + b.\varepsilon^{2/3} + d.\varepsilon^1$